Goochelen met

De wereld achter een trucje

Wiskundig goochelaar Job van de Groep weet met zijn getallentrucs iedereen te verbazen en om de tuin te leiden. Wie hem bezig ziet raakt gefascineerd door en nieuwsgierig naar de getallentrucs. Wat zit erachter? In dit artikel licht hij een tipje van de sluier rond een trucje op. Dat biedt kansen voor gebruik in de klas. Leerlingen blijken soms zo nieuwsgierig naar de werking van een goocheltruc te zijn, dat ze hun eigen reken-wiskunde-niveau ontstijgen. Dat is mooi, want soms mag het in de reken-wiskundeles best wel eens wat verder gaan dan gebruikelijk is.

Sommige leerlingen worden enorm uitgedaagd om te achterhalen hoe de getallen-goocheltrucs werken.

JASPER OOSTLANDER

Als je 24 deelt door 4 komt daar mooi precies 6 uit. De rest is nul. Als je 24 deelt door 7 komt er niet zo'n mooi geheel getal uit: 24 : 7 = 3 rest 3. We zeggen wel: '24 is deelbaar door 4' en '24 is niet deelbaar door 7'.
Soms is het handig als je al van te voren kunt voorspellen of een getal deelbaar is door een bepaald getal of niet. Misschien denk je dat je daarvoor je rekenmachientje wel even kunt gebruiken, maar het is leuker als je het ook zonder je zakjapanner kunt voorspellen.

Deelbaarheid herkennen

Als een rijke boer overlijdt, mogen zijn zeven zonen de erfenis verdelen. De erfenis bedraagt 561.449,21. Het is makkelijk te zien dat je dit bedrag precies mooi in zeven exact even grote porties kunt verdelen, want het getal bestaat uit vier getallenparen – 56, 14, 49 en 21 - die toevallig allemaal zevenvouden zijn; ze komen voor in de tafel van zeven. Het resultaat van die deling is 80207,03. Dit voorbeeld is toevallig wel heel erg mooi. Meestal moet er flink gerekend worden om vast te stellen of deelbaarheid door 7 mogelijk is.
Ook voor sommige andere delers, zoals 11 en 13, is het deelbaarheidskenmerk best ingewikkeld, maar voor de delers 2 en 5 is het juist weer heel gemakkelijk. Hoe kun je zien of je een getal door 2 kunt delen? En hoe kun je zien of je een getal door 5 kunt delen? Je kijkt naar het laatste cijfer van het deeltal en het wordt je gauw duidelijk. Delen door 10 is natuurlijk helemaal snel en makkelijk te zien.

Goochelen en delen door 9

Weet je hoe je aan een getal kunt zien of je het door 9 kunt delen? Daar moet je eerst wat rekenwerk voor verrichten. Een getal is deelbaar door 9 als de som van de cijfers van dat getal deelbaar is door 9. Is bijvoorbeeld het getal 53874 deelbaar door 9? Ja, want 5 + 3 + 8 + 7 + 4 = 27. En 27 kun je delen door 9, dus ook 53974 kun je delen door 9.

Waarom klopt dit trucje?

Hieronder volgt een bewijs van dit trucje:
Het getal 53874 is deelbaar door 9, want:
het getal 53874 kan je ook schrijven als:
5 x 10000 + 3 x 1000 + 8 x 100 + 7 x 10 + 4

En dát kan je weer schrijven als:
5 x (9999 + 1) + 3 x (999 + 1) + 8 x (99 + 1) + 7 x (9 + 1) + 4

Als je de haakjes wegwerkt krijg je:
5 x 9999 + 5 x 1 + 3 x 999 + 3 x 1 + 8 x 99 + 8 x 1 + 7 x 9 + 7 x 1 + 4

deelbaarheid

Dat kan je ook in een andere volgorde schrijven:
5 x 9999 + 3 x 999 + 8 x 99 + 7 x 9 + 5 + 3 + 8 + 7 + 4
Iedereen weet dat je de getallen 9999, 999, 99 en 9 keurig door negen kunt delen. Dát betekent dat ook de getallen 5 x 9999, 3 x 999, 8 x 99 en 7 x 9 door negen deelbaar zijn en dat geldt dan ook voor de som van die 4 getallen (5 x 9999 + 3 x 999 + 8 x 99 + 7 x 9). Het eerste stuk van de berekening is dus altijd door 9 deelbaar. We hoeven nu alleen nog maar naar het laatste stuk van de berekening te kijken om te ontdekken of het totale getal deelbaar is door negen. Het laatste stuk is in dit geval dus 5 + 3 + 8 + 7 + 4. Dat is precies de 'som van de cijfers' van het betreffende getal. Als die som ook nog eens deelbaar is door 9, dan moet het gehele getal precies door 9 deelbaar zijn. In dit geval is de som 27 en dat is inderdaad deelbaar door 9.

Dit bewijs geldt voor elk willekeurig getal met de willekeurige cijfers 'abcdefgh'. Want ook zo'n getal kun je schrijven als:
a x (9999999 + 1) + b x (999999 + 1) + ... + f x (99 + 1) + g x (9 + 1) + h en dat dan weer als:
a x 9999999 + b x 999999 + … + f x 99 + g x 9 + a + b + … + f + g + h
De rest van de bewijsvoering is uit het bovenstaande af te leiden.

Een goocheltruc

Nu je weet hoe je van elk getal kunt vaststellen of het al dan niet deelbaar is door 9, kun je daarmee een mooie goocheltruc uitvoeren. We doen daarbij net alsof we gebruik maken van 'gedachtengolven'.
Doe alsof je een groot goochelaar bent en laat je blinddoeken. Een 'assistent' uit het publiek noteert een willekeurig groot getal van bijvoorbeeld 7 of meer cijfers op het bord. De assistent moet vervolgens een tweede getal op het bord schrijven, maar daarvoor moet hij de cijfers van het eerste getal gebruiken. Hij moet dus de cijfers van het eerste getal door elkaar husselen. Het totaal aantal cijfers blijft dus gelijk.
Die twee getallen worden vervolgens, nog steeds buiten het zicht van de goochelaar, van elkaar afgetrokken. Zorg ervoor dat het grootste getal 'boven' staat.
Van het antwoord, het verschil, wordt nu één willekeurig cijfer, maar niet een nul, doorgestreept. De assistent gaat de overgebleven cijfers een voor een langzaam luid en duidelijk opnoemen. De rest van het publiek moet sterk denken aan het doorgestreepte cijfer. Zij moeten zogenaamd de juiste gedachtegolven op de goochelaar overbrengen. Direct daarna vertelt de goochelaar, zónder te hebben gekeken, wat het doorgestreepte cijfer was. Het publiek staat paf!!

Bijvoorbeeld:
Oorspronkelijk getal: 24581073
Tweede getal: 50378142
Verschil: 50378142 - 24581073 = 25797069
Stel dat één van de zevens uit het verschil wordt doorgestreept. Hoe kan de goochelaar dat weten als de overige cijfers hardop worden voorgelezen?

De goocheltruc heeft te maken met de deelbaarheidskenmerken van 9.
Het eerste getal dat de toeschouwer heeft verzonnen is wel of niet deelbaar door 9. Dat kan allebei.
Stel dat het getal *niet* deelbaar is door negen, en dus na deling door 9 een zekere 'rest' heeft, dan is het tweede getal, dat exact dezelfde cijfers heeft, ook niet deelbaar door negen, en het heeft na deling door 9 precies dezelfde 'rest'. Dat betekent dat wanneer die twee getallen van elkaar worden afgetrokken, ook de 'resten' als het ware van elkaar afgetrokken worden met als resultaat: nul. Met andere woorden, als dergelijke getallen van elkaar worden afgetrokken, ontstaat er altijd een negenvoud dat per definitie altijd deelbaar is door 9.

Kijk maar weer even naar het voorbeeld
24581073 is niet deelbaar door 9 want 2 + 4 + 5 + 8 + 1 + 0 + 7 + 3 = 30. Delen door 9 levert rest 3 op. Dat geldt ook voor het door elkaar gehusselde getal 50378142. Want dat is 5 + 0 + 3 + 7 + 8 + 1 + 4 + 2= 30. Delen door 9 levert ook hier rest 3 op.
50378142 - 24581073 = 25797069 rest nul. En dat laatste getal moet dus deelbaar zijn door 9.

Hoe kan de goochelaar het doorgestreepte cijfer raden?
Terwijl de toeschouwer de overgebleven cijfers een voor een

noemt, telt de goochelaar deze op (hoofdrekenen!). In het voorbeeld levert dat (met een doorgestreepte 7) de som 38 op. Het eerstvolgende negenvoud na 38 is 45. Het verschil is 7, dus het ontbrekende getal moet wel 7 zijn. Abracadabra! Het publiek zal versteld staan, terwijl de goochelaar heel goed begrijpt wat hij of zij doet.

Uitdaging voor rekenaars

Waarom zou je in de bovenbouw van de basisschool een onderwerp als 'deelbaar door 9' in de rekenles aan de orde stellen? Het staat niet in de kerndoelen. Het staat niet in de methode. Dus je zou als leerkracht kunnen denken: 'Ik heb wel wat beters te doen.' Maar wie zo redeneert doet zijn leerlingen te kort. Het is van belang dat je als leerkracht de belangstelling voor getallen van je leerlingen wekt. Laat ze inzien dat ze nog heel veel relaties tussen getallen kunnen ontdekken. Leerlingen nieuwsgierig maken naar de getallenwereld is een wezenlijk doel van het rekenen op de basisschool. Kinderen worden zich bewust dat wie kan rekenen, die kan zijn rekengereedschap gebruiken om nog veel meer ontdekkingen te doen met getallen. Het is leuk als je leerlingen het goocheltrucje kunnen uitvoeren, maar het wordt pas echt interessant voor leerkracht en leerlingen als ze gaan ontdekken waarom het trucje werkt. Het leveren van bewijzen is geen dagelijks werk op de basisschool, sommige leerkrachten zullen er zelf misschien even aan moeten wennen, maar kijk verder dan de grenzen van het rekenboek en ervaar hoe leerzaam het kan zijn voor de leerlingen om kennis te maken met wiskundige bewijzen. Vooral onze betere leerlingen mogen we dergelijke ervaringen niet onthouden. Maar ook voor gewone rekenaars is het waardevol om tot het inzicht te komen dat hun ontdekkingsreis door de getallenwereld eigenlijk nog maar net begonnen is.

Gegoochel met getallen

Vorig jaar verscheen het boekje 'Gegoochel met getallen'.

In 'Gegoochel met getallen' ervaren leerlingen dat er in de getallenwereld nog heel veel te ontdekken valt.

In dit boekje is de voorgaande goocheltoer te vinden, maar daarnaast bevat het nog vele andere verrassende trucs, die allemaal op een of andere manier gebruik maken van bepaalde eigenschappen van getallen en/of van handig rekenen. Menig professionele goochelaar heeft wel eens een keer zo'n rekentruc in z'n repertoire opgenomen. Behalve magisch vermaak, bieden de trucs (met uitleg) in het boekje ook veel reken- en puzzelplezier. Het vormt een belangrijke bron voor elke leerkracht die de reken-wiskundige ontwikkeling van zijn of haar leerlingen serieus neemt.

Wil je ook weten hoe je deelbaarheid door 11 kunt aantonen? Breng dan een bezoekje aan onze website www.volgens-bartjens.nl.

Wilt u Job van de Groep uitnodigen voor een rekengoochelles bij u op school? Mail dan naar Jvdgroep@planet.nl

De auteur was jarenlang wiskundeleraar en goochelaar met getallen.

Literatuur:

Job van de Groep (2006) ***'Gegoochel met getallen.'*** *Uitgeverij EPN – ISBN 90-11-09944-3.*