Tovervierkanten

De magische krachten van getallenvierkanten

Erica de Goeij en Adri Treffers

De leerlingen uit groep 4 van de Julianaschool in Bilthoven genieten doorgaans van de rekenlessen uit de methode. Maar als het boek een keer aan de kant wordt gelegd en ze rekenpuzzels mogen oplossen, is het helemaal een feest! Halverwege groep 4 is juf Erica de Goeij met tovervierkanten aan de slag gegaan. Haar leerlingen proberen de magische krachten van het vierkant te doorgronden.

Een tovervierkant is een vierkant met getallen erin, zó dat het totaal van de getallen in elke rij, in elke kolom en op de twee diagonalen steeds hetzelfde is. Het beroemdste tovervierkant, ook wel ‘magisch vierkant’ genoemd, is een vierkant van drie bij drie waarin de getallen 1 tot en met 9 zodanig worden geplaatst dat de som van elke rij, elke kolom en elke grote diagonaal gelijk is aan 15.
In de lessenserie over tovervierkanten, bestaande uit vijf lessen waarvan één met een terugblikkend karakter, gaan de leerlingen stapsgewijs op zoek naar dit magische vierkant.

Les 1: Elke rij 15
In de eerste les krijgen alle kinderen een kaart met daarop een vierkant van drie bij drie met negen lege hokjes. Verder knippen ze negen losse kaartjes uit met daarop de getallen 1 tot en met 9. Het voordeel van de kaartjes is dat kinderen er onbeperkt mee kunnen schuiven, terwijl op een blaadje de probeersels moeten worden doorgekrast of uitgegumd. Ook is het door de kaartjes uitgesloten dat kinderen per ongeluk eenzelfde getal twee keer gebruiken.

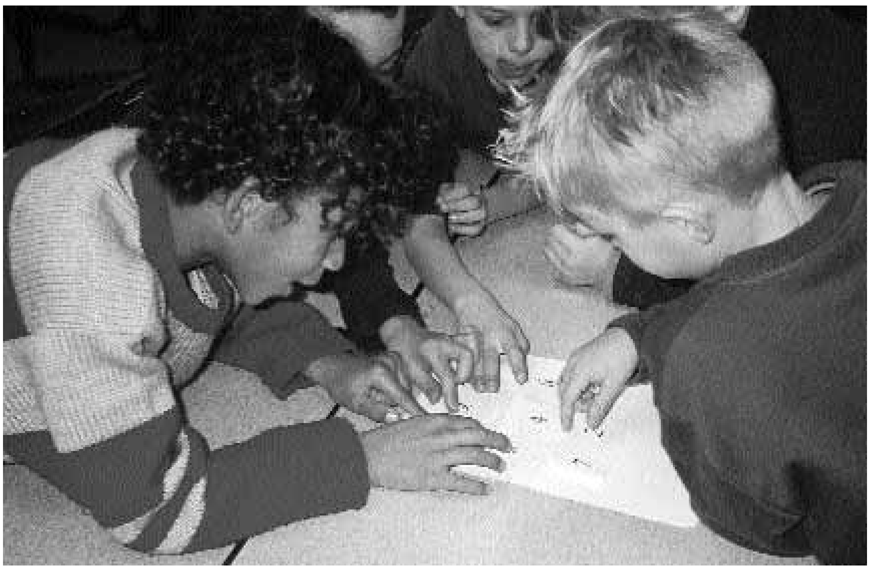
We beginnen eenvoudig. De kinderen krijgen de opdracht om via het schuiven van de kaartjes een tovervierkant te vinden waarin elke rij (horizontaal) opgeteld 15 is. De som van de kolommen en diagonalen mag elk willekeurig getal zijn.
Slechts een klein aantal leerlingen heeft hierbij hulp nodig van mij of van andere kinderen. De meeste leerlingen komen er zelf uit. Wie zo’n vierkant heeft gevonden schrijft ‘m op en kan er nog een gaan zoeken die er anders uitziet. In afbeelding 1 is een voorbeeld van zo’n tovervierkant te zien. De som van elke rij is 15.

1

8	4	3	15
1	9	5	15
7	6	2	15

Een vierkant waarin de som van elke rij 15 is.

Een ontdekking
Terwijl de kinderen druk aan het schuiven zijn, ontdekt een aantal van hen waarom het vierkant een *tover*-vierkant heet. Zij merken op dat na het vol leggen van twee rijen er altijd drie kaartjes overblijven die samen 15 zijn. Ook al gaat het om verschillende getallen die overblijven, steeds doet dit verschijnsel zich weer voor. Dat moet magie zijn! We proberen er met z’n allen achter te komen hoe dit mogelijk is. Dat blijkt een lastig probleem te zijn. Op mijn suggestie tellen we uiteindelijk de getallen 1 tot en met 9 eens bij elkaar op. De meeste kinderen beginnen bij het begin en tellen de getallen vanaf 1 één voor één bij elkaar op. Enkele leerlingen merken op dat het handiger is om achteraan bij de 9 en 8 te beginnen, ‘want dan hoef je er steeds minder bij te doen’. Naast deze twee manieren wil ik de kinderen toch ook de handigste aanpak niet onthouden: ‘Kijk maar eens goed naar de rij met getallen. Wat valt je op?’ Dan ontdekt iemand



Jasper Oostlander

Werk met losse getallenkaartjes dan kunnen kinderen eenvoudig allerlei mogelijkheden uitproberen.

de verliefde harten! Vier paren kunnen we vinden: 1 en 9, 2 en 8, 3 en 7, 4 en 6. Dan blijft 5 nog over, en dus wordt het 45 bij elkaar. We weten nu dat we in totaal 45 over drie rijen moeten verdelen. Elke rij krijgt 15. Als twee rijen zijn gevuld, ligt er 15 + 15 = 30 in het vierkant. Ernaast moet dus nog 45 – 30 = 15 liggen. Het eerste toverkunstje hebben we naar ieders tevredenheid opgelost!

Terugblik op les 1

Bij nader inzien vind ik het jammer dat ik bij het achterhalen van de toverkunst zelf de suggestie moest doen om de getallen 1 tot en met 9 bij elkaar op te tellen. Wellicht zou de volgende opdracht tijdens een eerste les rond tovervierkanten tot meer inzicht bij de kinderen kunnen leiden: ‘Plaats in de lege hokjes de getallen 1 tot en met 9. Het maakt niet uit hoe. Tel per rij de drie getallen op.’

2

1	3	7
8	4	5
6	9	2

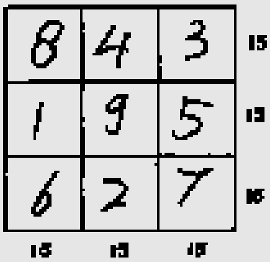
Als je de getallen 1 tot en met 9 optelt, kom je altijd op 45 uit, welke volgorde je ook kiest.

De som van de drietallen in de rijen van afbeelding 2 is: 11, 17 en 17. Dat maakt samen 45. Hetzelfde kan met de kolommen worden gedaan: 15, 16 en 14. Dat maakt ook samen 45. De vraag aan de kinderen zou kunnen zijn waarom de rij- en kolomtotalen beide 45 zijn. Uit de groep kan dan misschien het idee komen dat dit zo is omdat de som van de getallen 1 tot en met 9 … 45 is. De groep kan dit vervolgens gaan controleren, met de aansporing van de leraar om dit zo handig mogelijk uit te rekenen, zoals in het voorgaande beschreven is.

Les 2: Nu moeten ook de kolommen 15 zijn

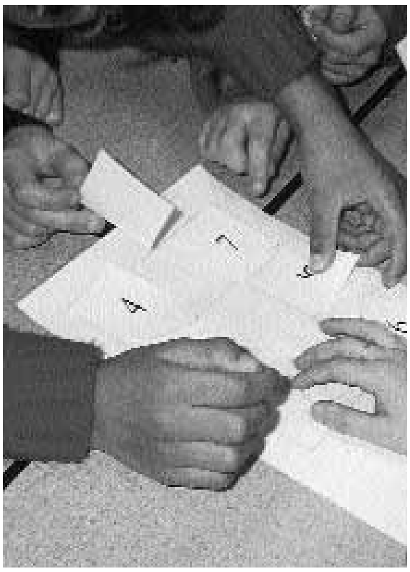
In de tweede les nemen we het tovervierkant uit les 1 weer voor ons. Dat hadden we gelukkig opgeschreven. We maken het moeilijker en proberen nu niet alleen de som van de rijen maar tegelijkertijd ook de som van de kolommen op 15 te krijgen. Voor de leerling van wie het werk in afbeelding 1 is afgebeeld was dit niet zo moeilijk. Een enkele verschuiving met de kaartjes in de onderste rij leverde al resultaat op. (Zie afbeelding 3)

3



In dit vierkant is zowel de som van de rijen als de som van de kolommen 15.

Toch is deze opdracht aanzienlijk moeilijker dan die in de voorgaande les. Niet alle kinderen hebben namelijk in de gaten dat het belangrijk is de drie kaartjes van elke rij bij elkaar te houden. Sommige leerlingen beginnen helemaal opnieuw en moeten via trial and error én de rijen én de kolommen op elkaar afstemmen. Geen gemakkelijke klus.
Kinderen die snel klaar zijn vinden uitdaging in het zoeken naar zoveel mogelijk vierkanten die aan de dubbele eis voldoen.



Jasper Oostlander

Als je eenmaal een goede mogelijkheid hebt gevonden, wil je natuurlijk weten of er nog meer mogelijkheden zijn.

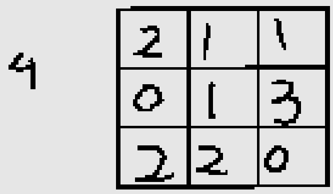
Les 3: Maak je eigen tovervierkant

Alvorens een overstap te maken naar het tovervierkant waarbij ook de twee diagonalen bij elkaar opgeteld 15 zijn, gaan we in de derde les eerst tovervierkanten maken met zelfgekozen getallen. De leerlingen mogen bovendien ook zelf kiezen wat steeds de som moet zijn van elke rij en elke kolom. Om te beginnen krijgen ze een werkblad met daarop een aantal lege vierkanten: drie bij drie, vier bij vier en vijf bij vijf. Vervolgens gaan ze elk leeg vierkant invullen en kloppend maken. Er mogen dit keer gerust dezelfde getallen in voorkomen.

Als de som van twee rijen 15 is, dan moet de som van de derde rij dat ook zijn

Na een uur en een kwartier hard werken besluit ik de les af te ronden. Als het aan de kinderen ligt, gaan ze nog uren door. Ze hebben geboeid en met veel enthousiasme de mooiste, moeilijkste en meest bijzondere vierkanten gemaakt.
Vooraf had ik niet verwacht dat dergelijke eigen producties zo veel mogelijkheden in zich dragen. Elke leerling kan op zijn of haar eigen niveau aan het werk en kiest zelf de getallen die hij of zij prettig vindt. Sommige leerlingen – vooral meisjes! – zoeken zekerheid en blijven met hun getallen veilig onder de tien (zie afbeelding 4).

4



Ontwerp je eigen vierkant waarin de rijen en de kolommen dezelfde som opleveren.

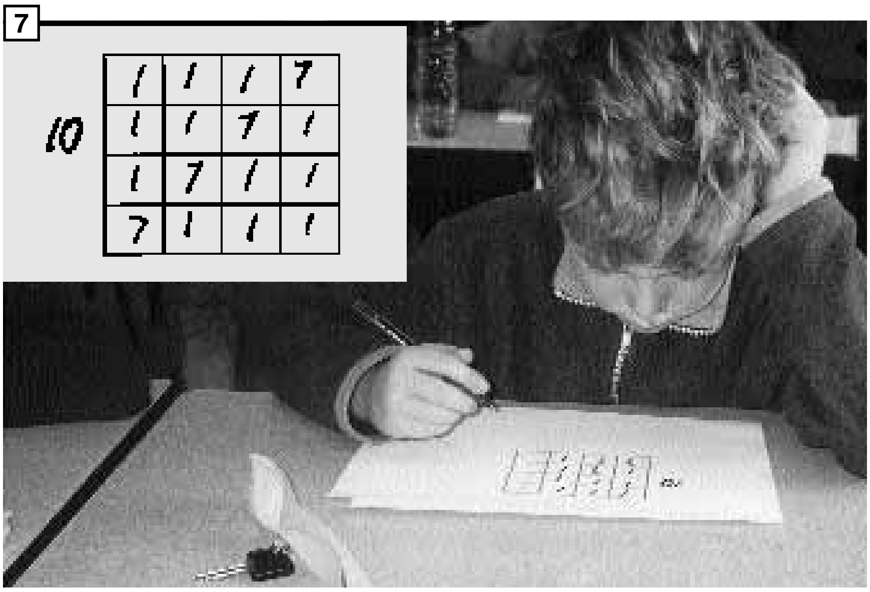
Anderen blijven onder de twintig maar zien wel een uitdaging in de keuze voor een groter vierkant (zie afbeelding 5).

5

	6	3	4	3
16	4	9	1	2
	5	1	6	4
	1	3	5	7

Een groter vierkant vormt een nieuwe uitdaging.

7



Wie eenmaal een handige structuur heeft gevonden, verzint zonder veel moeite het ene vierkant na het andere.

De meeste jongens hebben geen last van onzekerheid en nemen het ervan nu ze zelf getallen mogen kiezen. Hoe groter de getallen, hoe mooier het vierkant. Er kunnen niet genoeg nullen in de hokjes staan (zie afbeelding 6).

Er zijn ook kinderen die mooie en handige structuren ontdekken, waardoor ze het ene vierkant na het andere kunnen maken. In afbeelding 7 is daarvan een voorbeeld te zien.

Eigenlijk leer je je leerlingen pas goed kennen als je ze de kans geeft eigen producties zoals de tovervierkanten te maken: wat durven en kunnen ze wel en wat niet en hoe gaan ze om met de vrijheden die ze krijgen? Ook is het goed om te zien dat kinderen die normaal gesproken tijdens de rekenles moeilijk zelfstandig aan het werk blijven in deze puzzel zoveel uitdaging zien dat ze lange tijd gemotiveerd en geconcentreerd werken.

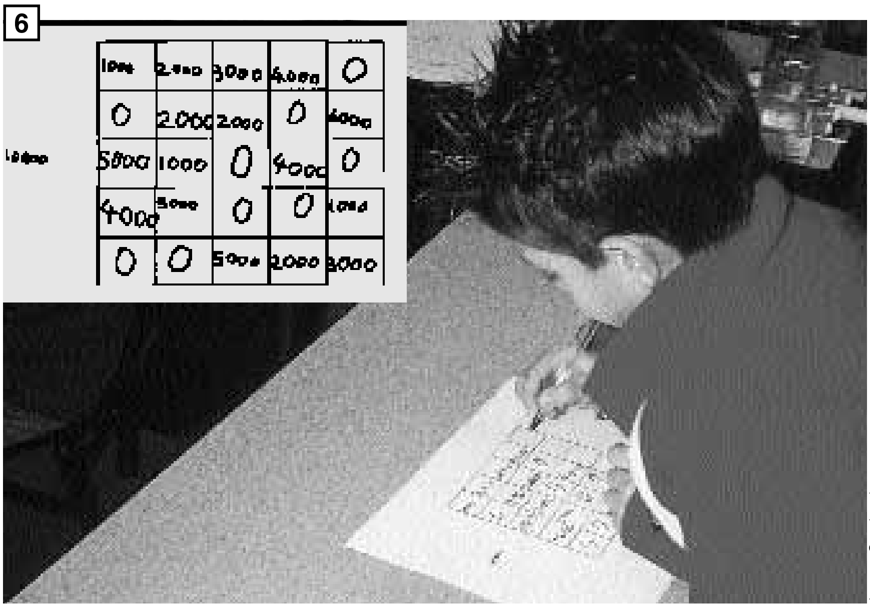
Les 4: Koning Vierkant

Na het maken van de eigen producties keren we weer terug naar onze zoektocht naar het beroemde magische vierkant. We doen dit aan de hand van het verhaal van Koning Vierkant. Koning Vierkant houdt er net als de kinderen van om verschillende tovervierkanten maken. Het is hem alleen nog niet gelukt het beroemde ***magische*** vierkant te vinden, waarin niet alleen de som van de rijen en de kolommen, maar ook de som van de grote diagonalen opgeteld 15 oplevert. Omdat hij dit bijzondere vierkant zelf niet kan vinden looft hij een hoge prijs uit voor degene die het magische vierkant wel heeft gevonden en het hem kan laten zien.

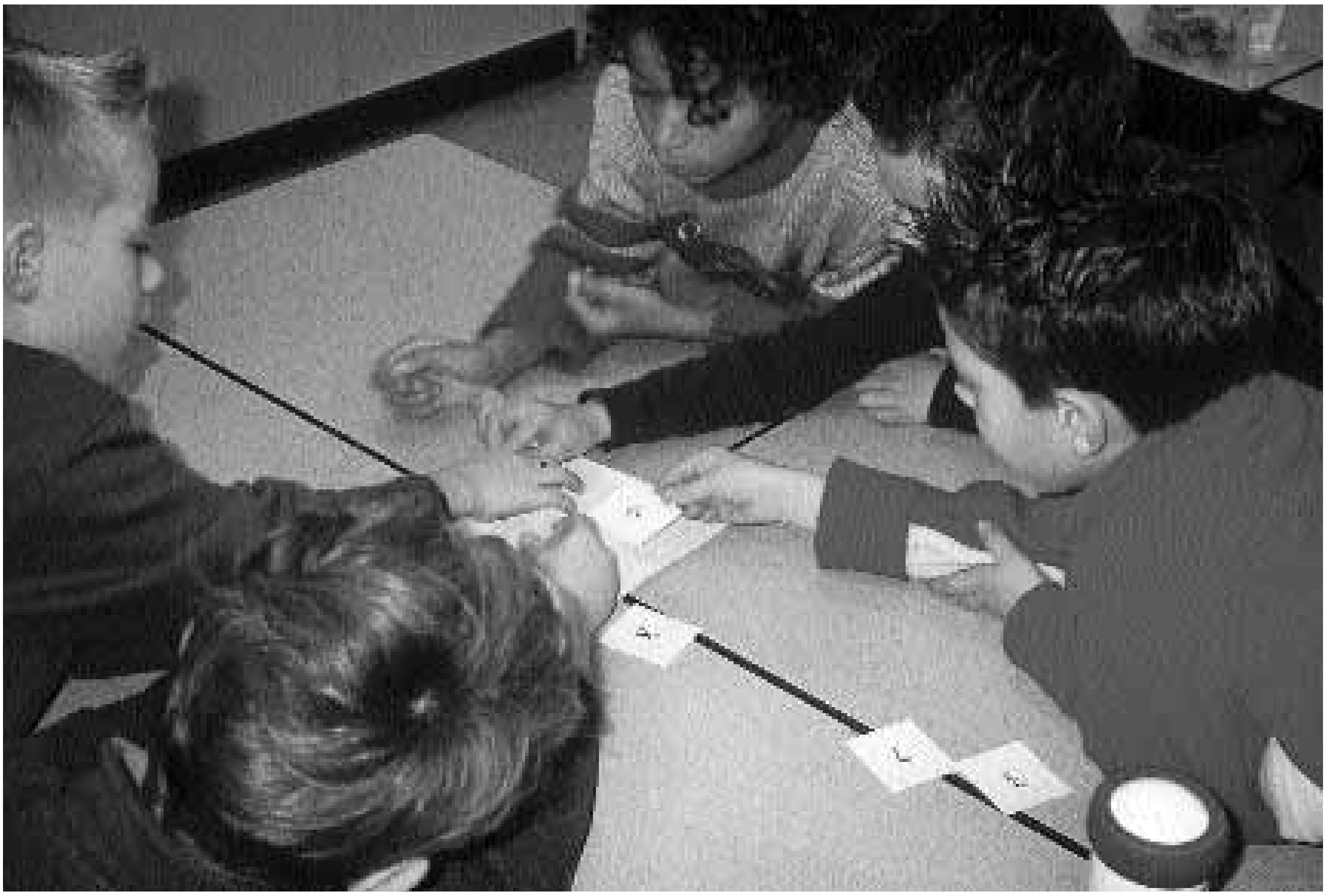
Koning vierkant is op zoek naar het beroemde magische vierkant dat aan alle eisen voldoet. Afbeelding afkomstig van www.kleurplaten.nl

Het duurt niet lang of de eerste vinder meldt zich bij Koning Vierkant: ‘Ik heb het magische vierkant gevonden, maar ik ga het u niet direct verklappen. Ik geef u een tip. U bent de grootste en hoogste in dit land, daarom staat de 9 in het midden.’ De koning voelt zich gevleid en is dolgelukkig met de tip.

6



Vooral jongens streven ernaar om de vakjes van hun tovervierkant met enorme getallen te vullen.

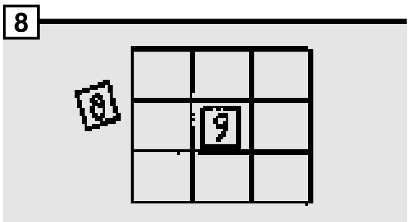


Jasper Oostlander

Waarom kan het getal 9 niet in het midden liggen?

Het magische vierkant komt in zicht. Voordat hij de hoge geldprijs aan de vinder overhandigt, besluit de koning de tip aan de hoge heren voor te leggen om te controleren of hij niet met een bedrieger te maken heeft. De hoge heren …, dat zijn de kinderen. Zij controleren of de vinder recht heeft op de beloning. Dit doen ze door op hun lege vierkant het kaartje met de 9 in het midden te leggen. In groepjes van vier overleggen ze hoe het vierkant er dan uit moet zien.

8



Als je de 9 in het midden zou leggen, kun je de kaartjes 6, 7 en 8 niet meer kwijt.

Ze schuiven druk met de kaartjes, maar er lijkt weinig uit te komen. Bij navraag blijkt geen van de groepjes het vierkant te hebben gevonden. Alle groepjes lopen tegen hetzelfde probleem aan. Als de 9 in het midden ligt kunnen ze de kaartjes 6, 7 en 8 niet meer kwijt. ‘Als je die wilt neerleggen, heb je meteen te veel’, luiden de reacties. (zie afbeelding 8) ‘Of je hebt een nul nodig, maar die is er niet.’ Ook als je de 8, de 7 of de 6 in het midden zou leggen, loop je tegen het probleem aan dat je de hoge getallen dan niet kwijt kunt.
Koning Vierkant is zijn hoge heren erg dankbaar. Zonder hun wijze raad zou hij de beloning aan een bedrieger hebben gegeven!

Het volgende voorstel

Dan klopt er een tweede vinder bij de koning aan. Ook hij is niet van plan het magisch vierkant zomaar cadeau te doen. Hij licht wel een tipje van de sluier op: ‘Er is maar één koning in dit land en dat bent u. U bent de nummer 1 van dit land. Ik zet u natuurlijk in het midden van het vierkant.’ Ook deze vinder weet Koning Vierkant te vleien, maar deze is wel op zijn hoede na zijn ervaring met de eerste vinder. Hij legt de tip opnieuw aan de hoge heren voor.

Voor veel jongens geldt: hoe groter de getallen, hoe mooier het vierkant.

De kinderen leggen nu het kaartje met de 1 in het midden en gaan weer in beraad. Nu lijkt het toch lastiger te zijn. Was bij de negen al snel duidelijk dat de boel met al die hoge getallen ‘overloopt’, bij de 1 in het midden is het voor de kinderen minder evident dat er drie kaartjes (2, 3, en 4) zijn die een tekort opleveren. De invloed van de 9 op een overschot lijkt gevoelsmatig groter te zijn dan de invloed van de 1 op een tekort. We spelen het probleem daarom helemaal uit, ook met de 2, 3 en 4 in het midden. Dan zien we dat we om 15 te krijgen, kaartjes nodig hebben die er niet liggen, respectievelijk 12, 11 en 10. Opnieuw moeten we concluderen dat een bedrieger uit is op het geld van de koning.

Het op speelse wijze oefenen van veel sommen is niet het hoofddoel

Alleen de 5 past in het midden

Er blijft maar een getal over dat in het midden past: de 5. Alle kinderen leggen dit kaartje in het midden en gaan de puzzel verder afmaken. Sommige kinderen – ook zwakke rekenaars! – hebben daar niet veel tijd voor nodig en ontdekken al snel de paren die samen tien zijn en met de 5 erbij 15 opleveren. Andere kinderen hebben wat langer werk, maar met een beetje hulp van klasgenoten komen ze er wel uit.
Ter afsluiting van de les inventariseren we nog welke verschillende oplossingen we met elkaar hebben gevonden. Van het beroemde magische vierkant zijn maar liefst acht verschillende varianten mogelijk die je door spiegelen, draaien en combinaties ervan kunt vinden. We bekijken ze echter niet allemaal, want er moet per slot van rekening voor volgend jaar ook nog iets overblijven!

Les 5: Terugblik op de lessenserie

Omdat ik benieuwd ben naar wat de kinderen van de lessenserie hebben gevonden en onthouden, deel ik in de vijfde en laatste les een vragenlijst uit met daarop vragen over de tovervierkanten. (Zie afbeelding 9). De resultaten laten zien dat de kinderen er best veel van onthouden hebben. Ze kunnen, weliswaar ieder op zijn eigen manier, goed beschrijven wat een tovervierkant precies is. Wat zo bijzonder was aan het magisch vierkant van Koning Vierkant weten ze ook allemaal nog ('die moet ook schuin'). De reacties op de lessenserie bevestigen de indruk die ik al had. De kinderen hebben veel plezier aan de lessen beleefd en er veel van geleerd. Goede rekenaars geven aan dat dit tenminste eens lekker moeilijk was. De meerderheid van de groep onderschrijft de suggestie om ook nog eens toverdriehoeken te gaan maken.

9

1. **Wat is een tovervierkant?**
2. **Maak op de achterkant van dit blaadje een tovervierkant waar 10 uit komt.**
3. **Koning Vierkant was op zoek naar een heel bijzonder tovervierkant. Wat was er zo bijzonder aan dit tovervierkant?**
   Welk getal moest er in het midden van dit tovervierkant staan?
   Weet je nog waarom de 9 niet in het midden kan?
4. **Zou je nog meer tovervierkanten willen maken? Waarom?**
5. **Vond je de lessen over tovervierkanten makkelijk of moeilijk?**
   Wat vond je makkelijk?
   Wat vond je moeilijk?
6. **Er bestaan ook toverdriehoeken. Zou je daar meer over willen weten?**

Een van de leerlingen is minder gelukkig met de lessenserie en dat heeft vermoedelijk te maken met de manier waarop hij tegen de tovervierkanten aankijkt. Hij omschrijft een tovervierkant als 'een vierkant dat eigenlijk sommen zijn'. Dat is ook zo. Echter, het op een speelse wijze oefenen van veel sommen was niet het hoofddoel van deze lessenserie. Het is juist belangrijk dat leerlingen ervaren dat rekenen-wiskunde een mooi uitdagend vak is waarin veel te puzzelen en te ontdekken valt!

Erica de Goeij is werkzaam op het Freudenthal Instituut en leerkracht basisonderwijs
Adri Treffers is werkzaam op het Freudenthal Instituut


Jasper Oostlander

Wie eenmaal de smaak van tovervierkanten te pakken heeft, kan er haast niet meer mee stoppen.